Examen de Admisión a la Maestría / Doctorado
21 de Noviembre de 2018

Nombre: ____

Instrucciones: En cada reactivo circula las respuestas correctas. Para una misma pregunta pueden haber varias soluciones correctas (elije todas, pero se restará puntaje por opciones incorrectas elejidas). Puedes hacer cálculos en las hojas que se te proporcionaron, pero no las tienes que entregar. El exámen cuenta de 30 reactivos. Te sugerimos leer primero todos los enunciados. **No se puede usar calculadora o celular.**

Duración del examen: 2 horas

1. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos es un espacio vectorial?

   a) El conjunto de números reales positivos con la suma dada por $x \oplus y = xy$ y la multiplicación por escalares dada por $a \otimes x = x^a$.

   b) El conjunto de matrices A de 2×2 tales que $\det(A) = 0$;

   c) El conjunto de polinomios $p(x)$ con $\int_{-1}^{1} p(x)dx = 0$;

   d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 3x_3 = 2\}$;

2. Un espacio vectorial V tiene 4 vectores que lo generan pero que son linealmente dependientes. De esta información se sigue que:

   a) $\dim(V) = 3$;

   b) $\dim(V) \leq 3$;

   c) $\dim(V) = 4$;

   d) $\dim(V) < 3$.

3. Sea A una matriz de 3×3 con $\det(A) = 0$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

   a) $Ax = 0$ tiene una solución no trivial.

   b) $Ax = b$ tiene una solución para toda b.

   c) Para toda matriz B de 3×3 se tiene que $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

   d) Para toda matriz B de 3×3 se tiene que $\det(AB) = 0$.

4. ¿Cuáles de los siguientes son subespacios vectoriales?

   a) El conjunto de todos los vectores (x_1, x_2, x_3, x_4) en $\mathbb{R}^4$ con la propiedad de que $2x_1 - x_2 = 0$ y $3x_3 - x_4 = 0$.

   b) El conjunto de todos los vectores $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ con la propiedad de que $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$.

   c) El conjunto de todos los vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ con la propiedad de que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$.

   d) El conjunto de todos los vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ con la propiedad de que $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 0$.

5. Calcula el determinante de $\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ x^8 & x^9 & x^4 \\ x^7 & x^6 & x^5 \end{pmatrix}$.

   a) 0;

   b) $-x^{19} + x^{17} + x^{13} - x^{11}$;

   c) x^{19};

   d) $-x^{19} + x^{18} + x^{17} - x^{16}$.

6. Sea V el espacio vectorial de todo los polinomios en t de grado menor o igual a n. Las siguientes son bases de V:

   a) $\{1, t, \ldots, t^n\}$;

   b) $\{1, t-1, (t-1)^2, \ldots, (t-1)^n\}$;

   c) $\{1+t, t+t^2, t^2+t^3, \ldots, t^{n-1}+t^n\}$.

7. Calcula el polinomio característico de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) $-\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda$.

   b) $\lambda^3 - \lambda^2 - 12\lambda$.

   c) $3\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda$.

   d) $4\lambda^3 + \lambda^2 - 12\lambda$.

8. Sea V el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$, equipado con el producto interno:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

¿Cuáles de las siguientes son bases ortonormales para V?

a) $1, t, t^2$;

b) $\operatorname{sen}(t), \cos(t)$;

c) $1, 2\sqrt{3}(t-\frac{1}{2}), 6\sqrt{5}(t^2-t+\frac{1}{6})$;

d) $1, (t-\frac{1}{2}), (t^2-t+\frac{1}{6})$.

9. Sea V el conjunto de todas las sucesiones infinitas $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de números reales con la propiedad de que $a_i = a_{i-2} + a_{i-1}$ para $i \geq 3$. Entonces

a) V no es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

b) V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 2.

c) V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 3.

d) V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión infinita.

10. Sean A y B dos matrices reales de $n \times n$. Sea $\operatorname{tr}(A)$ la traza de la matriz A. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones siempre se cumple?

a) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$;

b) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$;

c) $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(ACB)$;

d) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.

11. Sea A una matriz de $n \times n$ y λ un valor propio de A con vector propio v. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) $-v$ es un vector propio de $-A$ con valor propio de $-\lambda$.

b) Si B es una matriz de $n \times n$ y μ es valor propio de B, entonces $\lambda\mu$ es un valor propio de AB.

c) Sea c un escalar. Entonces $(\lambda + c)^2$ es valor propio de $A^2 + 2cA + c^2 I$.

d) Si μ es valor propio de una matriz B de $n \times n$, entonces $\lambda + \mu$ es un valor propio de $A + B$.

12. Los siguientes son eigenvalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 10001 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 10003 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 10005 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 10007 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 10009 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 10011 \end{pmatrix}.$$

a) 0 y 1;

b) 1000 y 1036;

c) 10000 y 10036;

d) 1, 10, 100, 1000, 10000 y 100000.

13. ¿Cuáles de las siguientes series convergen?

$$\text{I.- } \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\ln(m^{-3})}{m^{-3}};$$

$$\text{II.- } \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\ln(3)}{3m};$$

$$\text{III.- } \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{3^m}.$$

a) Ninguna;

b) I;

c) II;

d) III.

14. ¿Cuáles son subsucesiones de la sucesión $\{a_n\}$ definida por

$$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)?$$

$$\begin{aligned} &\text{I.- } b_n \text{ donde } b_n = 1 + \frac{1}{n}; \\ &\text{II.- } c_n \text{ donde } c_n = 1 + \frac{1}{2n}; \\ &\text{III.- } d_n \text{ donde } d_n = 1 + \frac{1}{2n-1}. \end{aligned}$$

a) Ninguna;

b) I;

c) II;

d) III.

15. Calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \ln(1-x)}{x - \ln(1+x)}.$$

a) 0;

b) -1;

c) 2;

d) 1.

16. Calcular

$$\lim_{h \to 0} \frac{\int_1^{x+h} e^{-t^2} dt - \int_1^x e^{-t^2} dt}{h}.$$

a) $-2xe^{-x^2}$;

b) 0;

c) 1;

d) e^{-x^2};

17. Sean $u = \sqrt{x^2+9}$ y $v = 3x^2 - 2x$. Calcula du/dv como función de x.

a) $\frac{1}{4(3x-1)\sqrt{x^2+9}}$ con $x \neq 1/3$;

b) $\frac{3x-1}{2\sqrt{x^2+9}}$;

c) $\frac{2x(3x-1)}{\sqrt{x^2+9}}$;

d) $\frac{x}{2(3x-1)\sqrt{x^2+9}}$ con $x \neq 1/3$.

18. ¿Cuál es la pendiente de la línea recta tangente a la curva $y^3 - x^2y + 6 = 0$ en el punto $(1, -2)$.

    a) $-2/5$;
    b) $-4/11$;
    c) $4/11$;
    d) 8.

19. Sea $f(x, y) = x^3 + 6xy + y^3 + 3$. ¿Cuáles de los siguientes son máximos relativos de f?

    a) $(0, 0)$;
    b) $(-2, -2)$;
    c) $(2, -2)$;
    d) $(2, 2)$.

20. ¿Cuáles de las siguientes caracteriza una solucion a la ecuación diferencial

$$y \ln y + xy' = 0 \text{ con } x > 0?$$

    a) $x \ln y = 1$;
    b) $xy \ln y = 1$;
    c) $(\ln y)^2 = 2$;
    d) $-y(\ln y)(\ln x) = 1$.

21. Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[0, 1]$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones es verdadera?

$$\text{I.- } \int_0^1 f(x^2)dx = \int_0^1 (f(x))^2 dx$$

$$\text{II.- } \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2\int_0^1 f(x)dx$$

$$\text{III.- } \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 = \int_0^1 (f(x))^2 dx$$

    a) Ninguna;
    b) I;
    c) II;
    d) III.

22. Considera la curva en $\mathbb{R}^3$ dada por $(\cos t, \cos t, \sqrt{2}\sin t)$. ¿Cuál es el vector unitario tangente en $t = \pi/3$?

   a) $(-\sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$;
   b) $(-\sqrt{6}/4, -\sqrt{6}/4, 1/2)$;
   c) $(1/2, 1/2, \sqrt{2}/2)$;
   d) $(\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2, \sqrt{2}/2)$.

23. Sea S la región cerrada del primer cuadrante del plano acotada por $x^2 + y^2 = 9$, el eje y, y el eje x. Calcula

$$\int\int_S xy(x+y)dA.$$

   a) $27/2$;
   b) 27;
   c) $162/5$;
   d) $324/5$.

24. Sea $f(x, y) = xe^y/(xy + 3)$ para $xy > 0$. Calcula $\frac{\partial f}{\partial x}$.

   a) e^y/y;
   b) $-3e^y/(xy + 3)^2$;
   c) $3e^y/(xy + 3)^2$;
   d) $(2xye^y + 3e^y)/(xy + 3)^2$.

25. La curva cerrada diferenciable C en el plano complejo no pasa por ningún entero real. Con esta información, la integral de línea

$$\int_C \frac{dz}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

   a) Tiene una infinidad de posibles valores.
   b) Puede ser infinita.
   c) Tiene exactamente 3 posibles valores.
   d) Sólo puede tomar valores imaginarios.

26. Sea G un grupo y sean H_1 y H_2 dos subgrupos de G tales que $H_1 \not\subset H_2$ y $H_2 \not\subset H_1$. Entonces

   a) $H_1 \cup H_2$ nunca es un subgrupo de G.
   b) $H_1 \cup H_2$ siempre es un subgrupo de G.
   c) $H_1 \cup H_2$ puede ser un subgrupo de G.

27. Todo grupo de orden 24 satisface lo siguiente.

   a) Tiene un subgrupo normal de orden 4 o 8.
   b) Tiene un subgrupo normal de orden 4 y un subgrupo normal de orden 8.
   c) Tiene un subgrupo normal de orden 4.
   d) Tiene un subgrupo normal de orden 8.

28. Sean a, b, c, d números complejos y sea $f(z) = (az + b)/(cz + d)$. Entonces

   a) f tiene al menos un punto fijo en el plano complejo.
   b) f puede tener exactamente 3 puntos fijos en el plano complejo.
   c) Si f no es constante, entonces $f(z)$ puede tomar cualquier valor complejo, si se define $f(\infty) = a/c$.
   d) Si f envía un círculo A a un círculo B, entonces f envía el interior de A al interior de B.

29. Sea $X = \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, un subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$, y $P = \{(n, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}, n > 0\}$. Entonces en el espacio X

   a) P es cerrado pero no abierto.
   b) P es abierto pero no cerrado.
   c) P es abierto y cerrado.
   d) P no es abierto ni cerrado.

30. Marque todas las opciones para las cuales se cumple el teorema central del cálculo: $F(x) - F(0) = \int_0^x F'(t)dt$

   a) F es continua.
   b) F es lineal a pedazos.
   c) F es absolutamente continua.
   d) F es continua y de variación acotada.