Examen de Admisión a la Maestría / Doctorado
7 de Junio de 2019

Nombre: ____

Instrucciones: En cada reactivo circula las respuestas correctas. Para una misma pregunta pueden haber varias soluciones correctas (elije todas, pero se restará puntaje por opciones incorrectas elejidas). Puedes hacer cálculos en las hojas que se te proporcionaron, pero no las tienes que entregar. El exámen cuenta de 30 reactivos. Te sugerimos leer primero todos los enunciados. **No se puede usar calculadora o celular.**

Duración del examen: 2 horas

1. ¿ Cuál de los siguientes es un subespacio de $\mathbb{Q}^n$?

   a) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n :$ donde todos los x_i son enteros$\}$;

   b) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n :$ donde x_1 o x_2 son cero$\}$;

   c) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n :$ donde $x_1 = 0\}$;

   d) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n :$ donde $3x_1 + 4x_2 = 1\}$.

2. Sea V el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales de grado a lo más 3. Sea W esl subespacio de todos los polinomios $p(x)$ en V tales que $p(0) = p(1) = p(-1) = 0$. ¿Cuál es la dimension de W?

   a) 3;

   b) 1;

   c) 4;

   d) 2;

3. Sea $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ¿ Cuánto vale M^{100}?

   a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

   d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

4. Sean a, b, c constantes con $a \neq 0$. ¿Para qué valores de x es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & a & -b \\ -1/a & x & x^2 \end{pmatrix}$ invertible?

   a) $x = 0$;

   b) $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ o $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

   c) $x \neq \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $x \neq \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

   d) Siempre es invertible.

5. Sea A una matriz de 3×3 con $\det(A) = 0$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

   a) $Ax = 0$ tiene una solución no trivial.

   b) $Ax = b$ tiene una solución para toda b.

   c) Para toda matriz B de 3×3 se tiene que $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

   d) Para toda matriz B de 3×3 se tiene que $\det(AB) = 0$.

6. Sean $X = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : b - c = 3 \right\}, Y = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : a = b + c \right\}$ y $Z = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : a = 0, b = d \right\}$.

   ¿Cuáles de estos son subespacios de $\mathbb{R}^4$?

   a) ninguno;
   b) X;
   c) Y y Z;
   d) todos.

7. Sea $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$ y $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

$$L(e_1) = (1, 2), L(e_2) = (2, -1), L(e_3) = (-1, 1), L(e_4) = (3, 1).$$

   ¿Cuál es la dimensión del kernel de L?

   a) 0;
   b) 1;
   c) 4;
   d) 2.

8. Sea V el espacio vectorial de funciones reales continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$ con producto interior definido por $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Sea $S = \{1, \operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t, \cos 2t, \dots\}$. Entonces

   a) S es ortonormal;
   b) S es ortogonal;
   c) S es una base para V.

9. Sea $T_1(x, y) = (2x + y, -x + y)$ y $T_2(x, y) = (x, x + 2y)$. ¿Cuále de las siguientes matrices corresponde a la composición $T_1(T_2)$ con respecto a la base estandar de $\mathbb{R}^2$?

   a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

10. Considere a $V = \mathbb{Z}_3^n$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_3$. ¿Cuántos subespacios de dimensión 1 tiene V?

   a) $(3^n - 1)/2$;
   b) $(3^n - 1)$;
   c) $3n$;
   d) 1.

11. Encuentra el polinomio característico de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

   a) $\lambda^3 - 13\lambda^2 - 2\lambda + 48$;
   b) $\lambda^3 - 13\lambda^2 + 2\lambda + 48$;
   c) $\lambda^3 - 13\lambda^2 - 2\lambda - 48$;
   d) $\lambda^3 + 13\lambda^2 - 24\lambda - 6$.

12. Sea A una matriz cuadrada cuyo polinomio característico es igual a

$$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}.$$

   ¿Cuál es el determinante de la matriz A?

   a) 1;
   b) $-\frac{1}{2}$;
   c) 0;
   d) 2.

13. Sea

$$a_n = n \operatorname{sen}(\frac{1}{n}) + (-1)^n \frac{\cos(n)}{n}.$$

   ¿Cuáles de los siguientes enunciados es cierto para la sucesión $\{a_n\}$.

   a) converge a un número positivo;
   b) converge a 0;
   c) esta acotada pero no converge;
   d) diverge.

14. Calcular

$$\lim_{x \to 0^+} x^x.$$

a) ∞;

b) 1;

c) 0;

d) e.

15. Encuentra la derivada con respecto a x de $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

a) $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$;

b) $\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$;

c) $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left[1+\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$;

d) $\frac{2}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{2}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right]$.

16. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con serie de taylo convergente a $f(x)$ para todo número real x. Si $f(0) = 2$, $f'(0) = 2$ y $f^{(n)}(0) = 3$ para $n \geq 2$. ¿Cuánto vale $f(x)$?

a) $e^{3x} + 2x + 1$;

b) $3e^x + 2x - 1$;

c) $3e^x - x - 1$;

d) $3e^x + 5x + 5$.

17. Sean $u = (x^2+9)^{1/2}$ y $v = 3x^2 - 2x$. ¿Cuál es $\frac{\partial u}{\partial v}$ como función de x?

a) $1/(4(3x-1)(x^2+9)^{1/2})$ para $x \neq 1/3$;

b) $(3x-1)/(2(x^2+9)^{1/2})$;

c) $(2x(3x-1))/(x^2+9)^{1/2}$;

d) $x/(2(3x-1)(x^2+9)^{1/2})$ para $x \neq 1/3$.

18. Sea $f(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$. ¿Cuánto vale $f''(0)$?

   a) $-\ln 2$;
   b) $-(\ln 2)^2$;
   c) 0;
   d) $(\ln 2)^2$.

19. Calcular

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_1^{x+h} e^{-t^2} dt - \int_1^x e^{-t^2} dt}{h}.$$

   a) e^{-x^2};
   b) $-2xe^{-x^2}$;
   c) 0;
   d) 1.

20. Sea $y = (3x)^{1/2}$ para $x > 0$. ¿ Cuál es la coordenada x del punto de la gráfica de y más cercano a $(5, 0)$.

   a) $7/2$;
   b) $2/7$;
   c) 1;
   d) $5/2$.

21. Sea $y(x)$ una solución a la ecuación diferencial $\sqrt{x^2+1}dy - (x/y)dx = 0$ que satisface $y(\sqrt{3}) = 3$. ¿Cuánto vale $(y(\sqrt{8}))^2$?

   a) 8;
   b) 6;
   c) 11;
   d) 13.

22. Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[0,1]$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones es verdadera?

$$\text{I.- } \int_0^1 f(x^2)dx = \int_0^1 (f(x))^2 dx$$
$$\text{II.- } \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2\int_0^1 f(x)dx$$
$$\text{III.- } \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 = \int_0^1 (f(x))^2 dx$$

a) Ninguna;

b) I;

c) II;

d) III.

23. Las coordenadas de un punto moviendose en $\mathbb{R}^3$ en el tiempo t estan dadas por

$$x = a \operatorname{sen} t,$$
$$y = b \cos t,$$
$$z = \frac{1}{2} c t^2.$$

Donde a, b y c son constantes. ¿Cuál es la velocidad al tiempo t?

a) $\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t + \frac{1}{4}c^2 t^4}$;

b) $\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen} t + c^2 t^2}$;

c) $\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t + 4c^2 t^2}$;

d) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

24. ¿Cuál es el área de la región del plano acotada por la curva en coordenadas polares $r = 3 + 2\operatorname{sen}(\theta)$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$?

a) 11π;

b) π;

c) $\sqrt{2}$;

d) 1.

25. Sea G un grupo finito tal que para todo par de subgrupos H, K de G se tiene que $H \subset K$ o $K \subset H$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son siempre verdaderas?

   a) G es un grupo cíclico de orden la potencia de un primo.

   b) G es cíclico de orden primo.

   c) G podría no ser abeliano.

   d) G solo tiene dos subgrupos.

26. Todo grupo de orden 24 satisface lo siguiente.

   a) Tiene un subgrupo normal de orden 4 y un subgrupo normal de orden 8.

   b) Tiene un subgrupo normal de orden 4.

   c) Tiene un subgrupo normal de orden 4 o 8.

   d) Tiene un subgrupo normal de orden 8.

27. ¿Cuáles de las siguientes funciones definen una métrica en $\mathbb{R}$?

   a) $d(x, y) = xy$;

   b) $d(x, y) = \text{máx}\{|x|, |y|\}$

   c) $d(x, y) = (x - y)^2$.

   d) $d(x, y) = 0$ si $x = y$ y $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$.

28. ¿Cuáles de las siguientes funciones son uniformemente continuas?

   a) $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0, \infty]$;

   b) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ en el intervalo (∞, ∞).

   c) $f(x) = \ln x$ en el intervalo $(0, 1)$;

   d) $f(x) = x \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, \infty]$;

29. La curva cerrada diferenciable C en el plano complejo no pasa por ningún entero real. Con esta información, la integral de línea

$$\int_C \frac{dz}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

   a) Puede ser infinita.

   b) Tiene una infinidad de posibles valores.

   c) Tiene exactamente 3 posibles valores.

   d) Sólo puede tomar valores imaginarios.

30. ¿Cuántos de sus elementos generan a $\mathbb{Z}_{12}$?

a) 4;

b) 6;

c) 9;

d) 8.