

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN  
Departamento de Matemáticas

**Examen de admisión a la Maestría**

31 de Enero del 2008

**1. Algebra Lineal**

- 1.1** Sea  $V$  un espacio vectorial y  $T : V \rightarrow V$  una transformación lineal tal que  $T^2 = I_V$ , donde  $I_V$  denota la transformación identidad de  $V$  en  $V$ . Considere los siguientes conjuntos

$$H_1 = \{v \in V | T(v) = v\}, H_2 = \{v \in V | T(v) = -v\}.$$

Demuestre que  $H_1$  y  $H_2$  son subespacios de  $V$  tal que  $V = H_1 \oplus H_2$ .

- 1.2** Sea  $T(x, y, z) = (3x + 2y + 4z, 2x + 2z, 2x + 2y + 3z)$  una transformación lineal de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$ .
- (i) Encuentre la representación matricial de  $T$  con respecto a la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .
- (ii) Determine los valores propios de  $T$  y una base para los subespacios de vectores propios correspondientes a los eigenvalores.
- 1.3** Sea  $V$  el espacio vectorial de todas las matrices de  $3 \times 3$  y sea  $A$  la siguiente matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule el determinante de la transformación lineal  $T$  de  $V$  en  $V$  definida por  $T(X) = \frac{1}{2}(AX + XA)$ .

**2. Cálculo**

- 2.1** Considere la siguiente función:

$$F(x) = \int_0^2 \text{sen}((x+t)^2) dt$$

Calcule  $\frac{dF(x)}{dx}|_{x=0}$ , la derivada de  $F(x)$  con respecto a  $x$  en cero.

- 2.2** ¿Que número es mas grande  $3^\pi$  o  $\pi^3$ ?

Nota: No se puede usar calculadora y hay que dar una demostración.

- 2.3** Se tiene un círculo y un cuadrado de áreas  $A_1$  y  $A_2$ , respectivamente. Determine el máximo posible de  $A_1 + A_2$ , sujeto a la condición de que la suma de los perímetros es constante e igual a 10.

### 3. Problemas opcionales

**3.1** De un ejemplo o demuestre que no hay ejemplos para cada una de las siguientes grupos:

- (1) Un grupo no abeliano,
- (2) Un grupo abeliano finito que no es ciclico,
- (3) Un grupo infinito con subgrupos de indice cinco,
- (4) Dos grupos finitos del mismo orden pero no isomorfos,
- (5) Un grupo  $G$  con un subgrupo  $H$  no normal,
- (6) Un grupo  $G$  con un subgrupo  $H$  de indice dos que no sea normal.

**3.2** Demuestre que para todo entero  $x \in \mathbb{Z}$  el número  $x^3 - x$  es un multiplo de 3.

¿Se cumple que  $x^4 - x$  es un multiplo de 4 para todo  $x \in \mathbb{Z}$ ?

**3.3** Encuentre el número de raices de  $z^4 + 5z + 1$  dentro del disco unitario.

**3.4** Demuestre que el siguiente limite existe:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \ln(N).$$