Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

15 de enero del 2009

1. Algebra Lineal

1.1 Sea S el subespacio vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (el espacio vectorial de las matrices reales de $n \times n$) generado por todas las matrices de la forma $AB - BA$ con A y B en $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
Demuestre que
$$\dim(S) = n^2 - 1.$$

1.2 Sean $P, Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tales que $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ y $I_{n\times n} - P - Q$ una matriz invertible. Demuestre que P y Q tienen el mismo rango.

1.3 Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^3 = I_{n\times n}$ y $A \neq I_{n\times n}$.

(a) ¿Cuales son los eigenvalores de A?

(b) De un ejemplo de una matriz que satisface estas condiciones.

2. Cálculo

2.1 Sea $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ una función real, tal que $f(1) = 1$ y
$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f(x)^2}.$$
Demuestre que
$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$
existe y que es menor que $1 + \frac{\pi}{4}$.
Nota: $f'(x)$ es la derivada de f en x.

2.2 Sean $f, g : [0, 1] \to [0, \infty)$ funciones continuas que satisfacen que
$$\sup_{0\leq x\leq 1} f(x) = \sup_{0\leq x\leq 1} g(x).$$
Demuestre que existe $t \in [0, 1]$ tal que $f(t)^2 + 3f(t) = g(t)^2 + 3g(t)$.

2.3 Demuestre o de un contraejemplo para cada una de las siguientes afirmaciones:

(a) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones reales tal que
$$\lim_{t\to a} g(t) = b \text{ y } \lim_{t\to b} f(t) = c.$$
Entonces $\lim_{t\to a} f(g(t)) = c$

(*b*) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y U un conjunto abierto de $\mathbb{R}$, entonces $f(U)$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$.

3. Problemas opcionales

3.1 Sea $n > 1$ un entero. Demuestre que la suma

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

no es un entero.

3.2 Sea $\mathbb{Z}[x]$ el anillo de polinomios en una variable sobre los enteros y

$$I = \langle 5, x^2 + 2 \rangle$$

el ideal de $\mathbb{Z}[x]$ generado por 5 y $x^2 + 2$. Demuestre que el ideal I es un ideal máximal.

3.3 Calcule la siguiente integral

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{\operatorname{sen} 4z},$$

donde la dirección de integración es contrareloj.

3.4 Calcule la siguiente integral

$$\int_0^{2\pi} e^{(e^{i\theta} - i\theta)} d\theta.$$