Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

20 de agosto de 1999

1. Algebra lineal

1.1 Sea A una matriz de orden n y denote por A'su transpuesta. Probar que si $A' = -A$ y n es impar, entonces det $A = 0$.

1.2 Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{\alpha_1 = (2,1,1), \alpha_2 = (-1,2,0) \\ &\quad \alpha_3, = (7,-4,2), \alpha_4 = (1,1,1)\}. \end{aligned}$$

Determinar una base de W contenida en $\mathcal{B}$.

1.3 Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Determine los valores propios de A y una base para los subespacios de vectores propios correspondientes.

2. Cálculo

2.1 Graficar la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3x$ indicando extremos locales, puntos de inflexión y los intervalos en que se tiene concavidad o convexidad.

2.2 Sea $g : (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$g(x) = \int_1^{x^3} \cos\,(1 + \sqrt{t})dt$

Calcular $g'(x)$.

2.3 Determine si la siguiente serie es convergente y justifique su respuesta.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

3. Problemas opcionales

3.1 Sea $\{Vi\}_{i=l}^{\infty}$ una sucesión arbitraria de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$. Es $\bigcap_{1=l}^{\infty} Vi$ siempre un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$? Justifique su respuesta

3.2 Sea $f_n : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$, con $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. ¿Para qué valores de n es f_n unformemente continua? Justificar la respuesta.

3.3 Sea (X,d)un espacio métrico y defina para $x, y \in X$

$$\hat{d}(x, y) := \min\{1, d(x, y)\}$$

Demostrar que $\hat{d}$es una métrica sobre X que determina los mismos conjuntos abiertos.

3.4 Sea $(\mathbb{Z}_n, +)$ el grupo aditivo de los enteros módulo n. ¿Es el producto cartesiano $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ isomorfo a $\mathbb{Z}_8$? Jus tifique su respuesta.