Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

1 de julio de 2013

Nombre:____
Area: ________________________
Asesor: ____

Instrucciones: Resolver todos los problemas de las secciones 1 y 2 y los que pueda de sección 3. Todas las soluciones deben ser apropiadamente justificadas. El examen tiene una duración de 3 horas.

1. **Algebra lineal**

   1.1 Se dice que una matriz cuadrada A $n \times n$ es **nilpotente** si $A^r = 0$, para algún entero $r \geq 1$. Sean A, B matrices nilpotentes de la misma dimensión y supónga que $AB = BA$. Demuestre que AB y que $A + B$ son matrices nilpotentes.

   1.2 Sea $L : V \to W$ una transformación lineal, donde V y W son espacios vectoriales de dimensión finita, tales que $\dim V > \dim W$. Demuestre que el núcleo de L no es $\{0\}$.

   1.3 Sea T una transformación lineal sobre el espacio vectorial V de dimensión n. Demuestre que si T tiene n valores propios **distintos** por pares, entonces T es diagonalizable.

2. **Cálculo**

   2.1 Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Decimos que f es **convexa** si para todo $a, b \in I$ y para cualquier $0 < t < 1$, se satisface

   $$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

   Demuestre que si $I \subseteq \mathbb{R}$ es abierto y f es convexa sobre I, entonces f es continua.

   2.2 Demostrar que las siguientes sucesiones $\{x_n\}_n$ y $\{y_n\}_n$ convergen y encontrar su respectivo límite, donde

(a) $x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}, \quad n \geq 1$

(b) $y_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad n \geq 1.$

2.3 Encuentre los valores extremos de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z,$$

sujeto a la restricción

$$2x - 3y + z - 6 = 0.$$

3. **Problemas opcionales**

3.1 Sean X y Y de espacios topológicos y supóngase además que X es compacto. Si $f : X \to Y$ una función continua, demuestre que $f(X)$ es conjunto compacto.

3.2 Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables sobre $[a, b]$, tales que $\{f_n\}$ converge uniformemente a alguna función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Demuestre que f es integrable sobre $[a, b]$.

3.3 Mostrar que cualquier grupo de orden ≤ 5 es abeliano.

3.4 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x, y) = \left\{ \begin{array}{cc} cx(x-y) & \text{si} \quad 0 < x < 2, \quad -x < y < x \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{array} \right\}$$

donde $c > 0$ es una constante. Calcule el valor de c para el cual f es una densidad de probabilidad.