Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

2 de julio de 2012

Instrucciones: Resolver todos los problemas de las secciones 1 y 2 y los que pueda de la sección 3. Todas las soluciones deben ser apropiadamente justificadas. El examen tiene una duración de 3 horas.

I. Algebra lineal

1.1 Sea A una matriz $n \times n$ con entradas en el conjunto $\{0, 1\}$, que tiene exactamente dos unos en cada columna y dos unos es cada renglón. Dar condiciones necesarias y suficientes para que el rango de A sea n.

1.2 Sean a y b dos números reales. Encontrar el determinate de la matriz nxn cuyas entradas son:

$$a_{ij} = \begin{cases} a & \text{if } i \neq j \\ a+b & \text{if } i = j \end{cases} \tag{1}$$

para $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$.

1.3 Verificar si la serie $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i^2} A^i$ converge, donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Cálculo

2.1 Verificar si la siguiente función es diferenciable

$$f(x,y) = \begin{cases} 2xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2.2 Probar que

$$\int_0^{\pi} \frac{xsen(x)}{1+cos^2(x)}dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

2.3 De un ejemplo de una sucesión x_n en los reales que cumpla con las siguientes condiciones (si existe):

(a) x_n converge y $\lim_{n\to\infty}(x_n)^{\frac{1}{n}} = 1$.

(b) x_n diverge y $\lim_{n\to\infty}(x_n)^{\frac{1}{n}} = 1$.

(c) x_n diverge, es acotada y $\lim_{n\to\infty}(x_n)^{\frac{1}{n}}$ existe.

3. Problemas opcionales

3.1 Probar que en $\mathbb{R}^n$ un conjunto es compacto si y solo si es cerrado y acotado. ¿Es cierto este resultado en cualquier espacio métrico?.

3.2 Encontrar $\lim_{x\to 0}(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}(I - A^{2n}))$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -(\frac{x}{n})^{\frac{1}{2}} \\ (\frac{x}{n})^{\frac{1}{2}} & -1 \end{pmatrix}$$

3.3 Dar un ejemplo de una función continua en los irracionales y discontinua en los racionales. Justifique.

3.4 Sea G un grupo abeliano con un número finito de sugrupos. Demostrar que G es finito.