Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maetría

1 de julio de 2011

1. Algebra Lineal

1.1 Suponga que A y B son endomorfismos de un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un campo F. Demuestre o dé un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

(a) Todo eigenvector de AB es un eigenvector de BA.

(b) Todo eigenvalor de AB es un eigenvalor de BA.

1.2 Probar que todo espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita) tiene una base.

1.3 Sea A una matriz $n \times n$ con entradas en los enteros. Demostrar que existe una matriz B con entradas en los enteros tal que $AB = I_n$ si y solo si $|\det A| = 1$. Donde I_n es la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

2. Cálculo

2.1 Demuestre que

$$\frac{x^2+y^2}{4} \leq e^{x+y-2} \text{ para todo } x \geq 0, y \geq 0.$$

2.2 Sea $x_1, x_2, \ldots$ es una sucesión de números reales nonegativos tal que

$$x_{n+1} \leq x_n + \frac{1}{n^2} \text{ para todo } n \geq 1.$$

Demuestre que el $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe.

2.3 Probar que

$$\int_0^{\pi} \frac{x sen(x)}{1+cos^2(x)} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

3. Problemas opcionales

3.1 Sea T una trasformacion lineal de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$. Probar que existe un $m \in \mathbb{R}$ tal que $|T(v)| \leq m|v|$, para toda $v \in \mathbb{R}^m$.

3.2 Probar que en $\mathbb{R}^n$ un conjunto es compacto si y solo si es cerrado y acotado. ¿Es cierto este resultado en cualquier espacio métrico?.

3.3 Sea G un grupo finito tal que $|G| = p^2$, con p un primo. Probar que G es abeliano.