Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

9 de enero de 2015

Nombre____
Area: ____
Asesor: ____

Instrucciones: Resolver todos los problemas de las secciones 1 y 2 y los que pueda de sección 3. Todas las soluciones deben ser apropiadamente justificadas. El examen tiene una duración de 3 horas.

1. **Algebra lineal**

   Notación: Dado un campo vectorial F, $M_{n\times m}(F)$ representa el conjunto de matrices de $n \times m$ con entradas pertenecientes al campo F.

   1.1 Dado $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ un vector distinto de cero, determine el rango de la matriz $(\lambda_i \cdot \lambda_j) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

   1.2 Sea $\mathcal{P}_2 \subset \mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de polinomios de grado ≤ 2 en la variable x y sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ la transformación lineal dada por
   $$T(p) = x^2\frac{d^2p}{dx^2} + x\frac{dp}{dx}; \quad p \in \mathcal{P}_2.$$
   Calcule los valores propios y los vectores propios de T.

   1.3 Determine si las siguientes funciones H son formas bilineales:

   (a) Sea $V = C([0,1])$ el espacio vectorial de las funciones continuas sobre $[0,1]$ con valores en $\mathbb{R}$ y defina
   $$H(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt, \quad \forall f,g \in V.$$

   (b) Sea $V = \mathbb{R}^2$ y defina $H(x,y) := det(x,y)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^2$, donde $det(x,y)$ representa el determinante de la matriz A en $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, de tal manera que $x \in \mathbb{R}^2$ es la primer columna de A y $y \in \mathbb{R}^2$ la segunda columna de A.

2. **Cálculo**

2.1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo su dominio que satisface la ecuación

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Demuestre:

(a) $f'(x)f(y) = f'(y)f(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = cf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(c) De los incisos anteriores concluya que $f(x) = e^{cx}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, si $f(0) \neq 0$.

2.2 Dado $a_n > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, dar una demostración o un contraejemplo de cada una de las siguientes proposiciones:

(a) Si $\sum_n a_n$ diverge, entonces $\sum_n a_n^2$ diverge.

(b) Si $\sum_n a_n^2$ converge, entonces $\sum_n a_n/n$ converge.

2.3 Supongamos que para cualquier $x > 0$, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la ecuación

$$\int_0^x f(t)dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x\ sen(2x) + \frac{1}{2}\ cos(2x).$$

Calcular $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

3. **Problemas opcionales**

3.1 Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles tales que $f_n : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es acotada para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que si $f_n \to f$ uniformemente, entonces f es acotada en S.

3.2 Calcular el grupo fundamental del plano proyectivo $\mathbf{RP^2}$.

3.3 Demuestre que en todo conjunto de 5 puntos en el plano, sin tres puntos colineales, siempre hay 4 puntos que forman un cuadrilátero convexo.

3.4 Sea X un espacio topológico, Y un espacio de Hausdorff y considere dos funciones continuas $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$. Demuestre que $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ es cerrado.