Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

10 de enero de 2014

Nombre: ____________________________________
Area: ______________________________________
Asesor: ____________________________________

Instrucciones: Resolver todos los problemas de las secciones 1 y 2 y los que pueda de sección 3. Todas las soluciones deben ser apropiadamente justificadas. El examen tiene una duración de 3 horas.

1. **Algebra lineal**

   Notación: Dada una matriz A, A^T representará su transpuesta.

   1.1 Decimos que una matriz simétrica A de $n \times n$ es positiva definida si $\langle Ax, x\rangle > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Demuestre que A es simétrica y positiva definida si y sólo si $A = P^T P$, para alguna matriz P invertible.

   1.2 Sean A y B dos matrices de $n \times n$ tales que $a_{ij},\ b_{ij} \in K$, donde K es un campo. Se dice que A es equivalente a B y lo denotaremos por $A \sim B$ si existe una matriz invertible C sobre K tal que $A = CBC^{-1}$. Demuestre que:

   (a) "$\sim$" es una relación de equivalencia.

   (b) $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$, donde $P_Q(\lambda)$ denota el polinomio característico de la matriz Q.

   1.3 Sea $V = \mathbb{R}^4$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su producto interno isual. Sean $v_1 = (1, 0, 1, 0)^T$, $v_1 = (1, 1, 2, 1)^T$ y $v_1 = (0, 1, 1, 2)^T$ tres vectores en V. Use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal en V a partir de v_1, v_2 y v_3.

2. **Cálculo**

2.1 Para cada $m \in \mathbb{N}$, defina la función
$$f_m(x) = x^3 + 3x + m.$$
Demuestre que f_m no puede tener dos raíces distintas en el intervalo $[0, 1]$.

2.2 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definida como sigue:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$
Defínase $Q(h) := f(h)/h$, si $h \neq 0$.

(a) Demuestre que $Q(h) \to 0$ cuando $h \to 0$.

(b) Demuestre que f tiene derivada en 0 y calcule $f'(0)$.

2.3 Sea $f : \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N} - \{0\}$ una función inyectiva. Demuestre que
$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n} f(k) \right)$$
diverge.

3. **Problemas opcionales**

3.1 Diga si la ecuación diferencial
$$\dot{x}(t) = 3x(t)^{2/3}, \quad t \geq 0,\ x(0) = 0,$$
tiene solución y si ésta es única.

3.2 Sea X un conjunto dado. Para $x, y \in X$, definimos
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$
Demuestre que (X, d) es un espacio métrico.

3.3 Demuestre que si H es un subgrupo normal abeliano en G y G/H es abeliano, entonces G no es necesariamente abeliano.

3.4 Sea γ el perímetro del cuadrado formado por los puntos 0, 1, $1+i$, i y sea $z = x + iy$. Calcule
$$\int_\gamma x\,dz.$$