

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemáticas

Examen de admisión a la Maestría

23 de enero de 2012

Instrucciones: Resolver todos los problemas de las secciones 1 y 2 y los que pueda de la sección 3. Todas las soluciones deben ser apropiadamente justificadas. El examen tiene una duración de 3 horas.

I. Algebra lineal

1.1 Sea n un número natural y $A = (a_{ij})$, donde

$$a_{ij} = \binom{i+j}{i},$$

para $0 \leq i, j < n$. Demuestre que A tiene inversa y que todas las entradas de A^{-1} son enteras.

1.2 Sea A una matriz $n \times n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, ambos con entradas reales positivas. Probar que si $A^2x = x$ entonces $Ax = x$.

1.3 Demuestre que una matriz A es diagonalizable si y sólo si existe una base conformada por vectores propios de A .

2. Cálculo

2.1 Probar que la serie

$$\sum_{k=1}^n \frac{3^k k!}{k^k}$$

no converge.

2.2 Sea h una función continua y g una función diferenciable en \mathbb{R} . Calcular la derivada de la función

$$f(x) = \int_0^{g(x)} h(t) dt.$$

2.3 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $|f(x, y)| \leq |(x, y)|^2$. Probar que f es diferenciable en $(0, 0)$

3. Problemas opcionales

3.1 Sea G un grupo finito tal que $|G|$ no es múltiplo de 3. Suponga que $(ab)^3 = a^3b^3$ para todo $a, b \in G$, probar que G es abeliano.

3.2 Probar que en \mathbb{R}^n un conjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado. ¿Es cierto este resultado en cualquier espacio métrico?

3.3 Dar un ejemplo de una función continua en los irracionales y discontinua en los racionales. Justifique.